Etude de fonction et recherche d'un minimum.

Fiche Professeur

On considère un segment [AB] de longueur 5 cm et une droite d passant par le point A et faisant un angle de 72° avec la droite AB.
Sur le segment [AB] on choisit un point variable M.
La perpendiculaire à AB passant par M coupe la droite d en N.

Partie A

a) Construire la figure d'abord sur la feuille, (puis à l'aide du logiciel de géométrie de la calculatrice).

b) Recueillir, à partir de la figure réalisée avec le logiciel de géométrie, les longueurs $\overline{AM}$ et $\overline{BN}$ pour une quinzaine de positions différentes du point M sur le segment [AB].
Représenter graphiquement ces données par un « nuage de points » (*scatter*) sur la feuille, *puis dans la fenêtre graphique de la calculatrice*, en reportant les valeurs $\overline{AM}$ en abscisse et les valeurs $\overline{BN}$ en ordonnée.

c) On pose : $\overline{AM} = x$.
Quelles sont les valeurs possibles pour x.
Exprimer d'abord $\overline{MN}$ en fonction de x et en déduire $\overline{BN} = l(x)$.
Représenter le graphe de la fonction l dans la même fenêtre graphique de la calculatrice que le nuage de points. Conclusions ?
Compléter le graphique sur la feuille

d) La fonction l semble avoir un minimum sur l'intervalle [0 ; 5].
Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de ce minimum et la valeur de x (valeur approchée à 10^{-2} près) pour laquelle il est atteint.

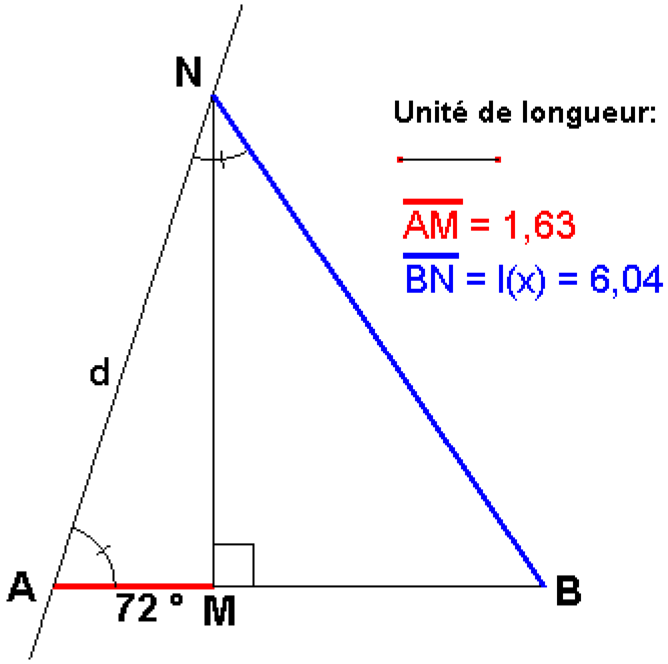
Partie B

On aimerait maintenant retrouver les résultats exacts de la partie d) par un raisonnement purement géométrique :

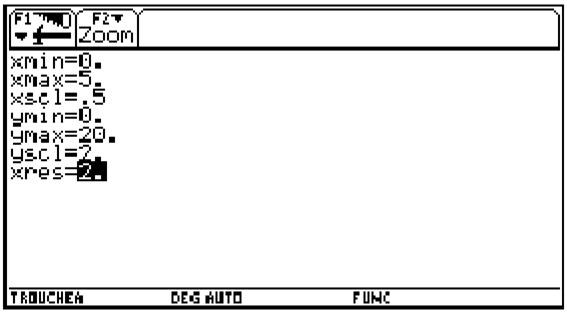
e) Revenir à la figure de la partie a).
A quelle condition sur les droites BN et d, la distance $\overline{BN}$ est-elle minimale ?
Faire une figure correspondant à ce cas sur la feuille.
Déterminer pour ce cas de figure les valeurs exactes de $\overline{BN}$ et $\overline{AM}$ ainsi que des valeurs approchées à 10^{-2} près. Conclusions ?

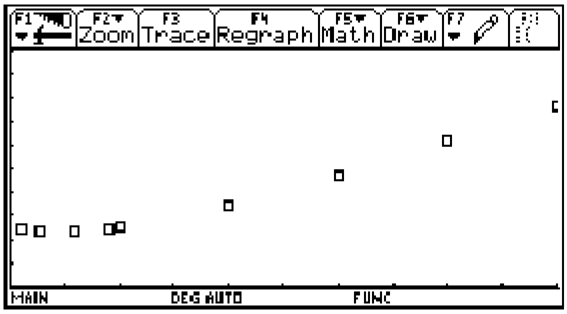
Corrigé modèle:

a)



b)





L'élève devra recopier avec soin la figure précédente sur sa feuille en précisant les unités choisies sur les axes.

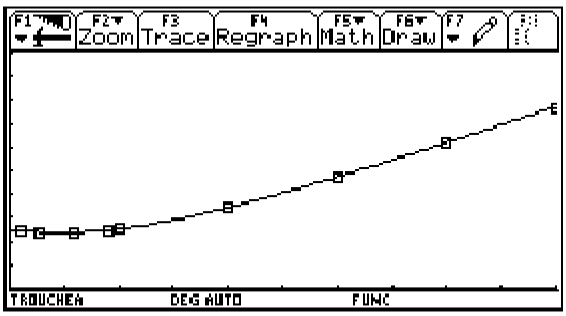
c) $\tan 72° = \dfrac{\overline{MN}}{\overline{AM}} \Leftrightarrow \overline{MN} = \overline{AM}\tan 72° = \dfrac{\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}+5\right)}}{4}x$

Théorème de Pythagore dans le triangle MBN :

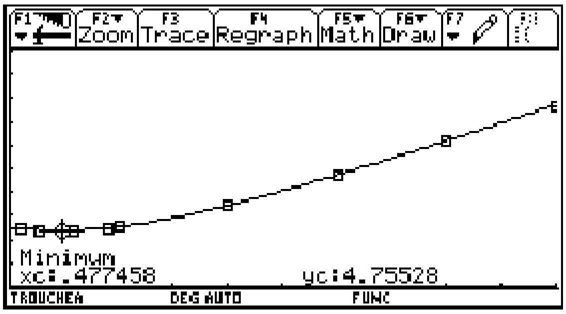
$$\overline{BN}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{MB}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{BN}^2 = \left(\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}+5\right)}}{4}x\right)^2 + (5-x)^2$$

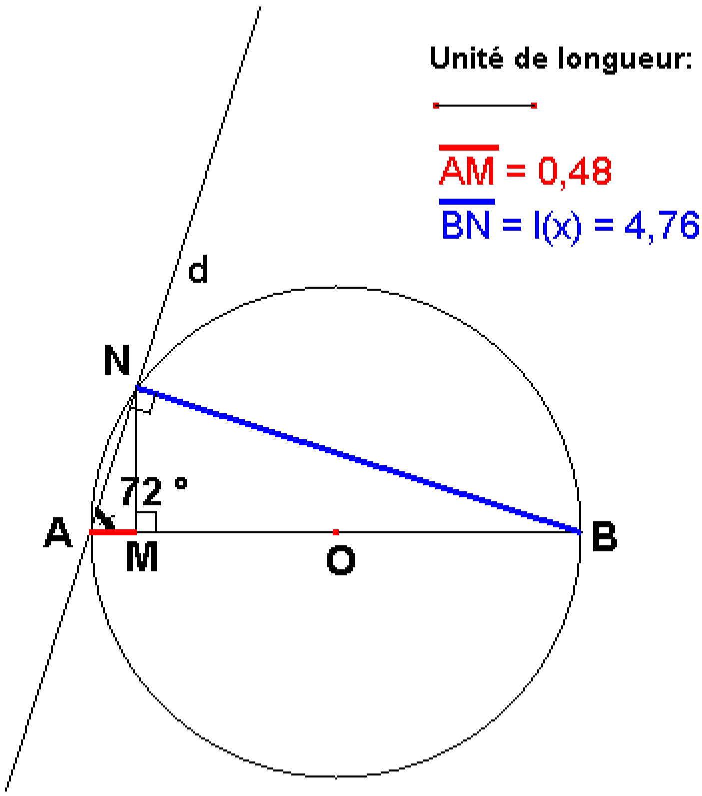
$$\Rightarrow \overline{BN} = l(x) = \sqrt{\left(6+2\sqrt{5}\right)x^2 - 10x + 25} \text{ car } \overline{BN} > 0$$



a) D'après la calculatrice graphique il semble que le minimum de la fonction l sur l'intervalle [0 ; 5] est $4,755... \approx 4,76$. Il est atteint lorsque $x = 0,477... \approx 0,48$.



e) $\overline{\mathrm{BN}}$ est minimale, lorsque les droites d et BN sont perpendiculaires.
Figure :
Le centre du cercle O est le milieu du segment [AB].



Calcul de la valeur minimale de BN :

$$\sin 72° = \frac{\overline{\mathrm{BN}}}{\overline{\mathrm{AB}}} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{BN}} = \overline{\mathrm{AB}} \cdot \sin 72° = 5 \cdot \sin 72° = \frac{5 \cdot \sqrt{2 \cdot \left(\sqrt{5}+5\right)}}{4} = 4,755... \approx 4,76 \text{ cm}$$

$$\cos 72° = \frac{\overline{\mathrm{AN}}}{\overline{\mathrm{AB}}} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{AN}} = \overline{\mathrm{AB}} \cdot \cos 72° = 5 \cdot \cos 72°$$

$$\cos 72° = \frac{\overline{\mathrm{AM}}}{\overline{\mathrm{AN}}} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{AM}} = \overline{\mathrm{AN}} \cdot \cos 72° = 5 \cdot \cos^2 72° = \frac{15 - 5\sqrt{5}}{8} \approx 0,48$$