

Distances minimales ou maximales

Exercice 1: Distances point - parabole

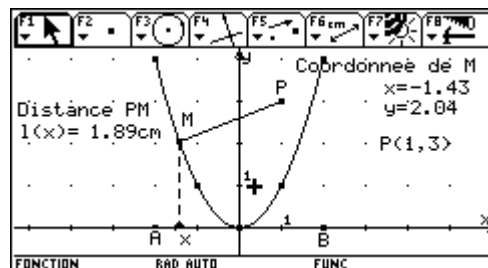
Soient $M(x, x^2)$ un point de la parabole donnée par son équation:

$$P \equiv y = x^2 \text{ et } P(1,3) \text{ un point fixe du plan.}$$

Il s'agit d'étudier la distance \overline{PM} en fonction de la position du point M, avec $x \in [-2; 2]$.

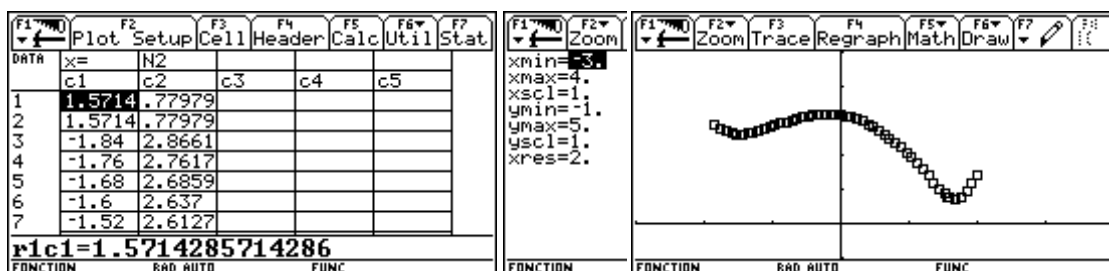
En particulier, il faut trouver les distances minimales et maximales de P aux deux branches de paraboles.

Pour y arriver, il s'agit d'utiliser le fichier Cabri *dmppara1* qui vous sera transmis sur votre calculatrice (cf figure ci-contre).



Résolution:

Rassemblons les données à l'aide de DataCollect en animant le point x fixé sur l'intervalle [AB]. Utilisons ces données pour nous faire une idée des résultats grâce à un nuage de points.



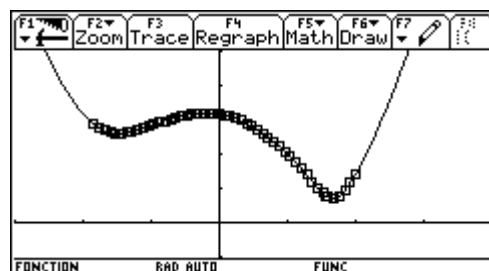
Nous constatons qu'il existe probablement deux minima et un maximum sur cet intervalle $[-2, 2]$:

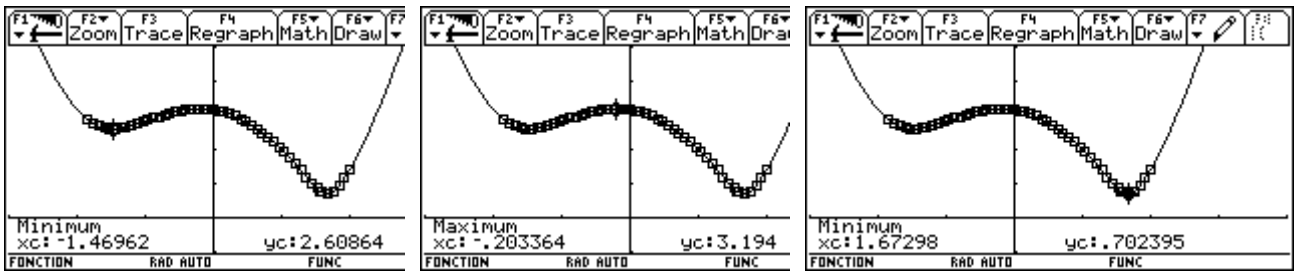
$$\text{Minima: } x \approx -1,5 \text{ et } x \approx 1,8 \quad \text{Maximum: } x \approx -0,2$$

Etablissons ensuite une formule qui nous permet de retrouver ces valeurs de manière plus précise:

$$\overline{PM} = l(x) = \|\overline{PM}\| = \sqrt{(x-1)^2 + (x^2-3)^2} = \sqrt{x^4 - 5x^2 - 2x + 10}$$

En représentant cette fonction sur le même graphique, nous constatons que la courbe passe effectivement par les points de notre nuage. Grâce à cette fonction, nous pourrions déterminer graphiquement les minima et maximum:





Remarque: Le premier minimum est la distance minimale du point P(1;3) à la branche de parabole se trouvant à gauche de l'axe des y et de deuxième minimum est celui de la distance du point P à la partie de la parabole se trouvant à droite de l'axe des y.

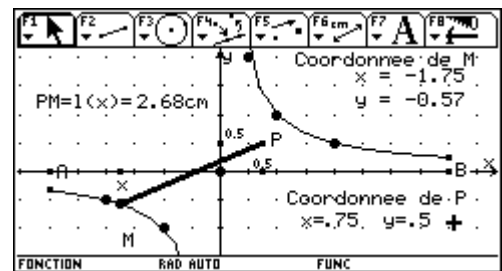
Exercice 2: Distances point - hyperbole

Soient $M(x, \frac{1}{x})$ un point de l'hyperbole donnée par son équation:

$H \equiv y = \frac{1}{x}$ et $P(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ un point fixe du plan.

Il s'agit d'étudier la distance \overline{PM} en fonction de la position du point M, avec $x \in [-3; 4]$.

Pour y arriver, il s'agit d'utiliser le fichier Cabri *dmphyper* qui vous sera transmis sur votre calculatrice (cf figure ci-contre).



Résolution:

[F8] - A Show page - nous permet de déplacer l'écran sur la page entière, si besoin y est.

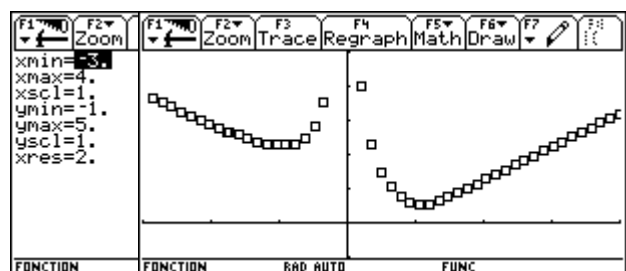
Avant d'attaquer le problème, il faut absolument détruire le fichier sysdata dans le répertoire main. Rassemblons les données à l'aide de DataCollect.

Choisissons dans l'ordre: x la variable indépendante et puis seulement $\overline{PM} = y = l(x)$ la variable dépendante.

En animant le point x fixé sur l'intervalle [AB].

Utilisons ces données pour nous faire une idée des résultats grâce à un nuage de points.

DATA	x	N2	c1	c2	c3	c4	c5
1	-1.754	2.6764					
2	-1.88	2.7765					
3	-2.02	2.8926					
4	-2.16	3.0123					
5	-2.3	3.135					
6	-2.44	3.26					
7	-2.58	3.3868					
r1c1 =		-1.7543859649123					



Nous constatons qu'il existe probablement deux minima sur cet intervalle $[-3,4]$:

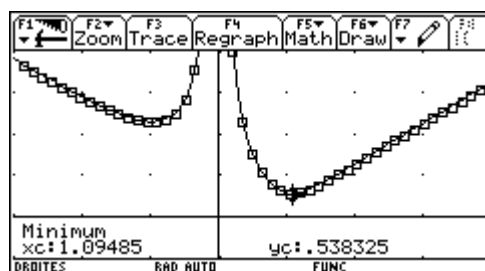
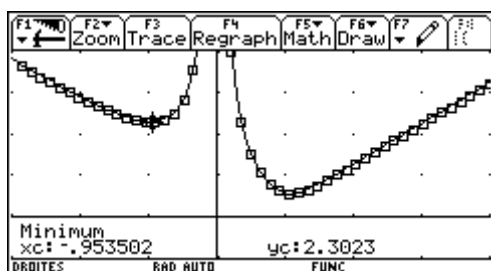
$$\text{Minima : } x \approx -0,94 \text{ et } x \approx 1,06$$

Ces valeurs peuvent être récupérées à l'aide du curseur qui saute d'une valeur à l'autre.

Etablissons ensuite une formule qui nous permet de retrouver ces valeurs de manière plus précise:

$$\overline{PM} = l(x) = \|\overline{PM}\| = \sqrt{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{13}{16} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

En représentant cette fonction, nous constatons qu'elle passe par le nuage de points. De cette manière, par F5 Math - Minimum, nous pouvons déterminer des valeurs plus précises des minima de cette fonction, comme l'indiquent les deux graphiques ci-dessous.

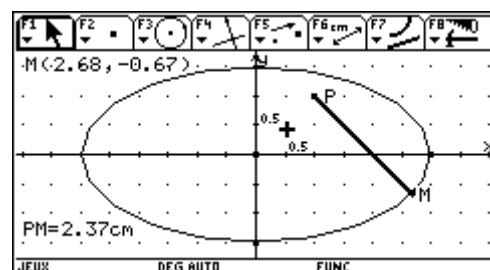


Minima de cette fonction (à 10^{-2} près): $M_1(-0,95; 2,30)$ et $M_2(1,09; 0,54)$.

Remarque: Pour calculer ces valeurs de manière encore plus précises, il faut attendre la classe de 2^{me} et le calcul des dérivées.

Exercice 3: Distances point - ellipse

Soit un r.o.n. $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Soient les points $P(1;1)$ et $M(x;y)$ donnés. Sachant que M parcourt (est un point de) l'ellipse E, quelles sont les distances minimales du point P à l'ellipse ?



Instructions de travail:

- Ouvrir le fichier Cabri *dmpellip* que avez reçu sur votre calculatrice.
- Recueillir les données sur la distance \overline{PM} à l'aide d'une animation sur le point M,
- en mettant en relation l'abscisse de M et \overline{PM} , représenter ces données dans le module **Graph**,
- recopier une esquisse de la courbe représentative de cette fonction (en indiquant les unités choisies) et
- est-ce que le nuage de points est une partie d'un graphe d'une fonction? Motiver votre réponse !
- lire les minima (abscisse et ordonnée) sur le nuage de points (méthode purement graphique).

2me partie de cet exercice:

- Sachant que l'équation de la partie supérieure de cette ellipse est donnée par l'équation:

$$E \equiv \left\{ y = \frac{1}{2} \sqrt{9 - x^2} \quad \text{si } y \geq 0, \text{ déterminez l'équation de la fonction } f \text{ qui exprime la distance } \overline{PM} \text{ en fonction de l'abscisse de } M, \text{ expression à noter sur votre feuille.} \right.$$

- Utilisez la V200 pour déterminer une valeur plus précise du minimum de f , que vous notez sur votre feuille.

Résolution:

Avant d'attaquer le problème, il faut absolument détruire le fichier sysdata dans le répertoire main.

Rassemblons les données à l'aide de DataCollect.

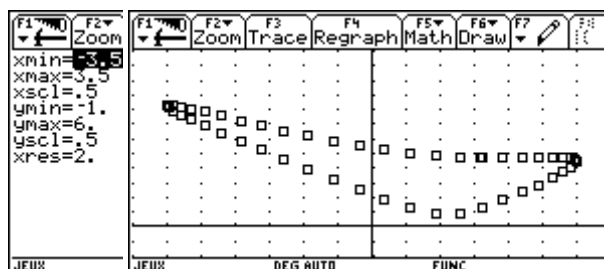
Le point M se déplace sur l'ellipse, ce qui veut dire que si x varie, l'ordonnée de M est déterminée à l'aide de l'équation de l'ellipse. La distance \overline{PM} dépend donc de l'abscisse du point M .

Choisissons dans l'ordre: x la variable indépendante (abscisse du point M)
 $\overline{PM} = y = l(x)$ la variable dépendante.

Animons le point M fixé sur l'ellipse.

Utilisons ces données pour nous faire une idée des résultats grâce à un nuage de points.

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	C	N2					
	c1	c2	c3	c4	c5		
1	1.5946	2.3471					
2	1.2885	2.3722					
3	.92705	2.4277					
4	.56664	2.5107					
5	.19042	2.6249					
6	-.1904	2.7662					
7	-.5666	2.9275					
r1c1=1.5946475444213							
JEUX	DEG	AUTO	FUNC				



Nous constatons que le nuage de points n'est pas nécessairement représentatif pour le graphe d'une fonction. Ceci s'explique d'ailleurs simplement par le fait que pour un x donné, le point M peut prendre deux positions distinctes sur l'ellipse. Il s'agit donc d'une fonction bi-univoque. Il existe probablement deux minima sur l'intervalle $[-3,3]$:

Minima:	$x \approx 0,92$	distance de la partie supérieure de l'ellipse	$\overline{PM} \approx 0,43 \text{ u.l.}$
	$x \approx 1,92$	distance de la partie inférieure de l'ellipse	$\overline{PM} \approx 2,34 \text{ u.l.}$

Ces valeurs peuvent être récupérées à l'aide du curseur (**F3** - Trace) qui saute d'une valeur à l'autre.

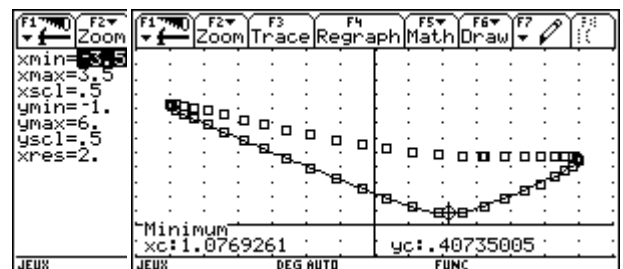
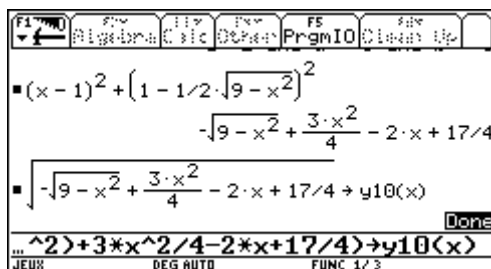
Etablissons ensuite une formule qui nous permet de retrouver ces valeurs de manière plus précise:

- Partie supérieure de l'ellipse, dont l'équation est donnée par:

$$E \equiv \left\{ y = \frac{1}{2}\sqrt{9-x^2} \quad \text{si } y \geq 0 \right.$$

$$\overline{PM} = l(x) = \|\overline{PM}\| = \sqrt{(x-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{9-x^2} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{3x^2}{4} - 2x + \frac{17}{4} - \sqrt{9-x^2}}$$

En représentant cette fonction, nous constatons qu'elle passe par le nuage de points. De cette manière, par **F5** Math - Minimum, nous pouvons déterminer des valeurs plus précises des minima de cette fonction, comme l'indiquent les deux graphiques ci-dessous.

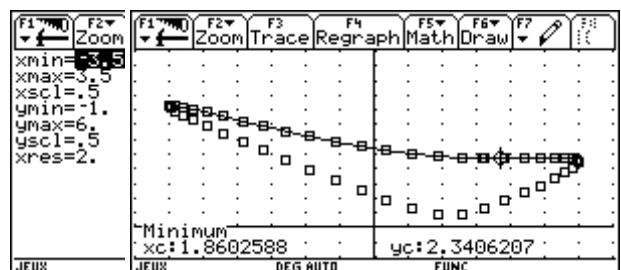
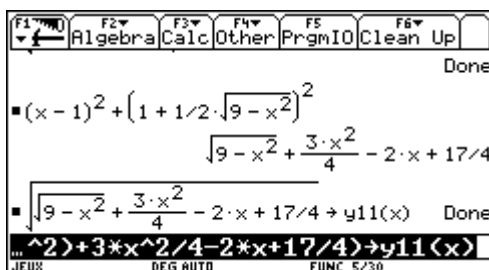


Minimum de cette fonction (à 10^{-2} près): $M_1(1,08; 0,41)$.

- Partie inférieure de l'ellipse, dont l'équation est donnée par:

$$E \equiv \left\{ y = -\frac{1}{2}\sqrt{9-x^2} \quad \text{si } y < 0 \right.$$

$$\overline{PM} = l(x) = \|\overline{PM}\| = \sqrt{(x-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{9-x^2} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{3x^2}{4} - 2x + \frac{17}{4} + \sqrt{9-x^2}}$$



Minimum de cette fonction (à 10^{-2} près): $M_2(1,86; 2,34)$.