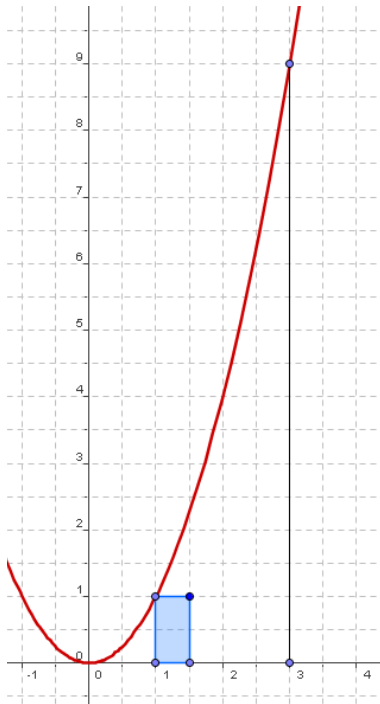


Calcul d'aires



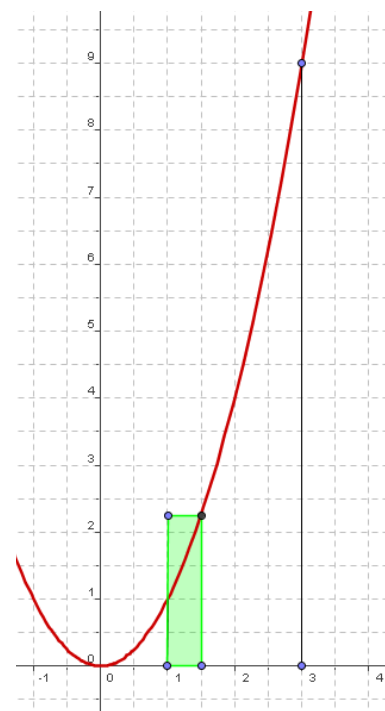
① Fiche de travail

Soit la fonction f donnée par: $f : x \rightarrow f(x) = x^2$

a) On se propose de calculer l'aire hachurée comprise entre la courbe

C_f , l'axe des x et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.

On place des rectangles qui approchent l'aire recherchée une fois par défaut (rectangles bleus), une fois par excès (rectangles verts).



Aire inférieure

$$\begin{aligned} &= 0,5 \cdot f(1) + 0,5 \cdot f(1,5) + 0,5 \cdot f(2) + 0,5 \cdot f(2,5) \\ &= 0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 1,5^2 + 0,5 \cdot 2^2 + 0,5 \cdot 2,5^2 \\ &= 0,5 \cdot (1 + 2,25 + 4 + 6,25) = 0,5 \cdot 13,5 = 6,75 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Aire supérieure

$$\begin{aligned} &= 0,5 \cdot f(1,5) + 0,5 \cdot f(2) + 0,5 \cdot f(2,5) + 0,5 \cdot f(3) \\ &= 0,5 \cdot 1,5^2 + 0,5 \cdot 2^2 + 0,5 \cdot 2,5^2 + 0,5 \cdot 3^2 \\ &= 0,5 \cdot (2,25 + 4 + 6,25 + 9) = 0,5 \cdot 21,5 = 10,75 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Nombre d'intervalles n	Aire A_{inf}	\mathcal{A}	Aire A_{sup}
$n = 2$			
$n = 4$			
$n = 10$			
$n = 25$			
n			
Pour $n \rightarrow \infty$			

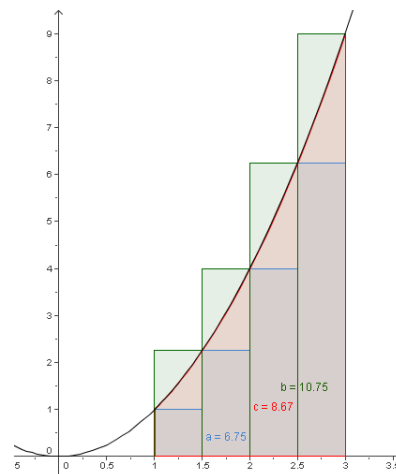
② Exemple d'introduction: Calculs

Soit la fonction f donnée par: $f : x \rightarrow f(x) = x^2$

On se propose de calculer l'aire (de la surface) comprise entre la courbe C_f , l'axe des x et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.

Comme nous ne disposons pas de formule pour le calcul d'une telle aire, nous allons approcher cette aire \mathcal{A} par une somme d'aires de rectangles comme indiqué sur le graphique.

Il est facile de voir que: $A_{\text{inf}} \leq \mathcal{A} \leq A_{\text{sup}}$



a) Calculons les aires A_{inf} et A_{sup} par la méthode classique apprise en 4^{me} année scolaire.

$$\text{Largeur d'un rectangle: } base = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \text{ cm}$$

$$A_{\text{inf}}: \text{ Hauteurs des rectangles: } f(1) = 1^2 = 1 \text{ cm} \quad f(1,5) = (1,5)^2 = 2,25 \text{ cm}$$

$$f(2) = 2^2 = 4 \text{ cm} \quad f(2,5) = (2,5)^2 = 6,25 \text{ cm}$$

$$A_{\text{inf}} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2,25 + \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 6,25 = 6,75 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{sup}}: \text{ Hauteurs des rectangles: } f(1,5) = (1,5)^2 = 2,25 \text{ cm} \quad f(2) = 2^2 = 4 \text{ cm}$$

$$f(2,5) = (2,5)^2 = 6,25 \text{ cm} \quad f(3) = 3^2 = 9 \text{ cm}$$

$$A_{\text{sup}} = \frac{1}{2} \cdot 2,25 + \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 6,25 + \frac{1}{2} \cdot 9 = 10,75 \text{ cm}^2$$

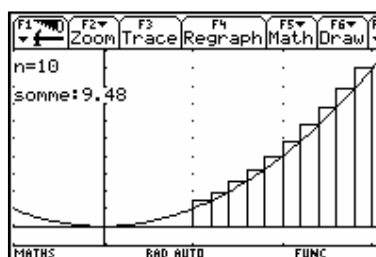
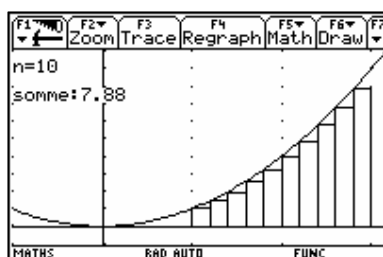
Donc : $6,75 \leq \text{Aire} \leq 10,75$

b) Grâce à deux petits programmes de la V200 (*rieman_g(a,b,n)* et *rieman_d(a,b,n)*), nous allons pouvoir approcher cette aire de mieux en mieux en augmentant successivement le nombre des intervalles et donc des rectangles.

En introduisant dans *CalcHome* :

`rieman_g(1,3,10)` et
 ↑↑
 extrémités de l'intervalle considéré

`rieman_d(1,3,10)`
 ↑
 nombre d'intervalles



on obtient l'illustration graphique ainsi qu'une approximation de l'aire en question.

- c) Avant de continuer dans le sens d'une généralisation complète, essayons d'expliquer comment on arrive à généraliser le calcul sous a) pour un nombre d'intervalle quelconque, appelé n .

Pour y arriver, nous allons nous baser sur les calculs pour $n = 4$:

Aire inférieure:

- Largeur de l'intervalle régulier:

$$\text{largeur} = \frac{3-1}{4} \xrightarrow{\text{en généralisant}} \text{largeur} = \frac{3-1}{n}$$

- Hauteurs respectives:

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 + 0 \cdot \frac{3-1}{n} \\ f(1,5) = 1 + 1 \cdot \frac{3-1}{n} \\ f(2) = 1 + 2 \cdot \frac{3-1}{n} \\ f(2,5) = 1 + 3 \cdot \frac{3-1}{n} \end{array} \right\} \Rightarrow f(i) = 1 + i \cdot \frac{3-1}{n} \text{ avec } i \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Comme il y a $n = 4$ intervalles dans notre exemple, i est à considérer de 0 à $n-1$.

- D'où: Aire inférieure = Aireinf (n) = $\frac{3-1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(1 + i \cdot \frac{3-1}{n}\right)$

Aire supérieure:

- Largeur de l'intervalle régulier:

$$\text{largeur} = \frac{3-1}{4} \xrightarrow{\text{en généralisant}} \text{largeur} = \frac{3-1}{n}$$

- Hauteurs respectives:

$$\left. \begin{array}{l} f(1,5) = 1 + 1 \cdot \frac{3-1}{n} \\ f(2) = 1 + 2 \cdot \frac{3-1}{n} \\ f(2,5) = 1 + 3 \cdot \frac{3-1}{n} \\ f(3) = 1 + 4 \cdot \frac{3-1}{n} \end{array} \right\} \Rightarrow f(i) = 1 + i \cdot \frac{3-1}{n} \text{ avec } i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Comme il y a $n = 4$ intervalles dans notre exemple, i est à considérer de 1 à n .

- D'où: Airesupérieure (n) = Airesup (n) = $\frac{3-1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(1 + i \cdot \frac{3-1}{n}\right)$

En utilisant les programmes transférés par le professeur ($sr_g(a,b,n)$ et $sr_d(a,b,n)$), ou bien en définissant soi-même ces modules, on trouve pour $n = 4$ les résultats établis sous a) et pour un nombre d'intervalles quelconque n :

Programme	Résultat
rieman_d(1, 3, 10)	Done
sr_g(1, 3, 25)	8.35
sr_d(1, 3, 25)	8.99
sr_g(1, 3, n)	$\frac{2 \cdot (13 \cdot n^2 - 12 \cdot n + 2)}{3 \cdot n^2}$
sr_d(1, 3, n)	$\frac{2 \cdot (13 \cdot n^2 + 12 \cdot n + 2)}{3 \cdot n^2}$
sr_d(1, 3, n)	

Nombre d'intervalles n	\mathcal{A}	\mathcal{A}
n = 2	5,00	13,00
n = 4	6,75	10,75
n = 10	7,88	9,48
n = 25	8,35	8,99
n	$\frac{2 \cdot (13n^2 - 12n + 2)}{3n^2}$	$\frac{2 \cdot (13n^2 + 12n + 2)}{3n^2}$
Pour $n \rightarrow \infty$	$\frac{26}{3}$	$\frac{26}{3}$

- d) Lors du passage à la limite sur le nombre n d'intervalles, on constate que les limites des aires inférieures et supérieures sont toutes les deux égales à $\frac{26}{3}$.

D'après le théorème des gendarmes (ou du sandwich) il s'ensuit que

$$\mathcal{A} = \frac{26}{3} \text{ unités d'aire}$$

En considérant des bornes quelconques

Généralisons en remplaçant la borne inférieure par a et la borne supérieure par b. En utilisant les mêmes fonctions de la V200, nous obtenons:

$$\text{Somme inférieure: } sr_g(a,b,n) = \frac{-(a-b) \cdot [a^2 \cdot (2n^2 + 3n + 1) + 2ab(n^2 - 1) + b^2(2n^2 - 3n + 1)]}{6n^2}$$

$$\text{Somme supérieure: } sr_d(a,b,n) = \frac{-(a-b) \cdot [a^2 \cdot (2n^2 - 3n + 1) + 2ab(n^2 - 1) + b^2(2n^2 + 3n + 1)]}{6n^2}$$

Par le passage à la limite sur le nombre d'intervalles n:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (sr_g(a,b,n)) = \frac{-(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{3} = \frac{-(a^3 - b^3)}{3} = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \text{ et}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (sr_d(a,b,n)) = \frac{-(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{3} = \frac{-(a^3 - b^3)}{3} = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

En choisissant le point milieu de chacun de ces intervalles, nous obtenons encore une fois cette même limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (sr_m(a,b,n)) = \frac{-(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{3} = \frac{-(a^3 - b^3)}{3} = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

ce qui nous mène encore au même résultat. Finalement en choisissant un point quelconque, arbitraire de chaque intervalle, le résultat ne change pas non plus:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (sr_r(a,b,n)) = \frac{-(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{3} = \frac{-(a^3 - b^3)}{3} = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Première conclusion

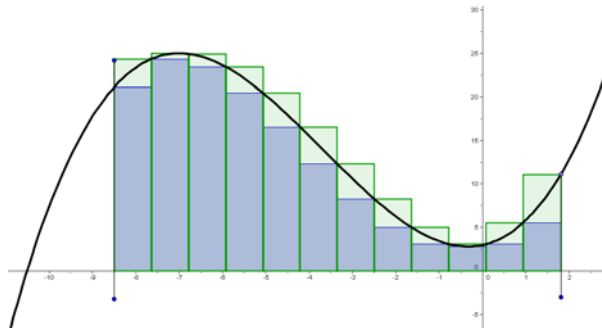
Nous pouvons en conclure que, quelle que soit la position du point au sein de l'intervalle, cette limite est

toujours la même et on note : $\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$

③ Généralisation plus globale

On veut calculer l'aire de la surface délimitée par C_f , l'axe des x et les deux droites verticales d'équations respectives $x = a$ et $x = b$, avec $a < b$.

En nous inspirant de l'exemple concret précédent, et en particulier du cas des 4 intervalles, nous observons que:

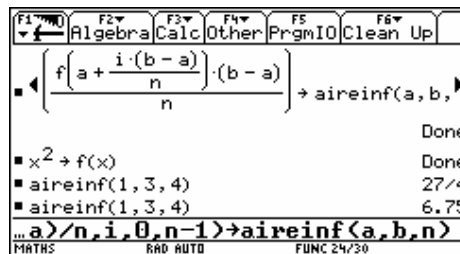


pour la somme inférieure:

- la base (largeur d'un intervalle) dépend du nombre d'intervalles n choisis: $\frac{b-a}{n}$
- la hauteur du rectangle correspond toujours à $f(x_i)$, avec x_i l'abscisse du point à l'extrême gauche de l'intervalle considéré. Or: $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$
- Par addition des différentes aires de rectangles:

$$A_{\text{inf}} = \sum_{i=0}^{n-1} \left[f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n} \right] \stackrel{V200}{=} sr_g(a, b, n)$$

- Contrôle de la formule sur notre exemple: $f(x) = x^2$, $a = 1$, $b = 3$, $n = 4$



pour la somme supérieure:

- la base (largeur d'un intervalle) dépend du nombre d'intervalles n choisis: $\frac{b-a}{n}$
- la hauteur du rectangle correspond toujours à $f(x_{i+1})$, avec x_{i+1} l'abscisse du point à l'extrême droite de l'intervalle considéré. Or: $x_{i+1} = a + (i+1) \cdot \frac{b-a}{n}$

- Par addition des différentes aires de rectangles:

$$A_{\text{inf}} = \sum_{i=0}^{n-1} \left[f\left(a + (i+1) \cdot \frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n} \right] \stackrel{V200}{=} sr_d(a, b, n)$$

- Contrôle de la formule sur notre exemple: $f(x) = x^2$, $a = 1$, $b = 3$, $n = 4$

```

n-1
┌───┴───┐
│ ∑i=0 f(a + (i+1)·(b-a)/n) · (b-a) → airessup │
└───┬───┘
Done
airesup(1, 3, 4) 43/4
airesup(1, 3, 4) 10 75
lim aireinf(1, 3, n) 26/3
n→∞
lim airesup(1, 3, n) 26/3
n→∞
limit(airesup(1, 3, n), n, ∞)
MATHS RAD AUTO FUNC 28/30

```

Le passage à la limite

nous permet de retrouver la valeur exacte de l'aire recherchée qui correspond à $\frac{26}{3} u.a.$ pour $a = 1$ et $b = 3$, mais il nous permet également de trouver une formule générale pour la fonction $f : x \rightarrow f(x) = x^2$ pour les bornes a et b :

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
┌───┴───┐
│ Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up │
└───┬───┘
Done
x2 → f(x)
lim aireinf(a, b, n)
n→∞
-(a-b)·(a2 + a·b + b2)
expand(lim aireinf(a, b, n)) b3 - a3
n→∞ 3 3
d<limit(aireinf(a, b, n), n, ∞)>
MATHS RAD AUTO FUNC 30/30

```

Or en comparant ce résultat à la fonction primitive de f , on remarque aisément que :

$$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{x^3}{3} + k \quad \text{et}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{aireinf}(a, b, n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{airesup}(a, b, n) = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = F(b) - F(a)$$

En généralisant à une fonction f quelconque et en notant la largeur de l'intervalle par dx , qui représente en physique une variation très petite de $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, nous pouvons retenir:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Remarque: Grâce à deux autres programmes pour la V200, il est possible de contrôler que l'on trouve le même résultat si on choisit le milieu de chaque intervalle ($sr_m(a,b,n)$, m comme milieu) ou même un point quelconque de chaque intervalle formé ($sr_r(a,b,n)$, r comme random).

■ $sr_m(a,b,n)$

$$\frac{-(a-b) \cdot (a^2 \cdot (4 \cdot n^2 - 1) + 2 \cdot a \cdot b \cdot (2 \cdot n^2 + 1))}{12 \cdot n^2}$$
 ■ $expand(\lim_{n \rightarrow \infty} sr_m(a,b,n))$ $\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$
 ■ $sr_r(a,b,n)$

$$\frac{-(a-b) \cdot (a^2 \cdot (n^2 + 1.05994 \cdot n + .124488))}{12 \cdot n^2}$$
 ■ $expand(\lim_{n \rightarrow \infty} sr_r(a,b,n))$ $\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$
 ... **pand(limit(sr_r(a,b,n),n,∞))**

MATHS RAD AUTO FUNC 1/30