Suites numériques (manipulations de la V200)

Fiche du professeur

Niveau : 3e BCD

Sujets et objectifs :

- Définir une suite par mode explicite à l'aide de la V200.
- Calculer la somme des n premiers termes d'une suite à l'aide de la V200.
- Résoudre des équations à l'aide de la V200.
- Etudier le sens de variation d'une suite à l'aide de la V200.

Connaissances préliminaires

- Suites arithmétiques et géométriques.

Exercice 1

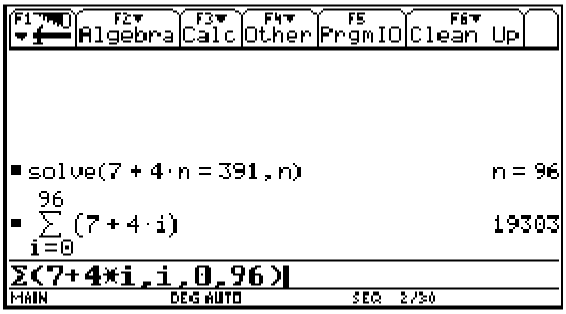
Calculer la somme $7+11+15+...+391$ sachant que les termes de cette somme sont les termes d'une suite arithmétique.

Réponse

$7+11+15+...+391=7+(7+4\cdot 1)+(7+4\cdot 2)+...+(7+4\cdot n)$

$7+4\cdot n=391 \Leftrightarrow n=96$

$\sum_{n=0}^{96}(7+4\cdot n)=19303$



Exercice 2

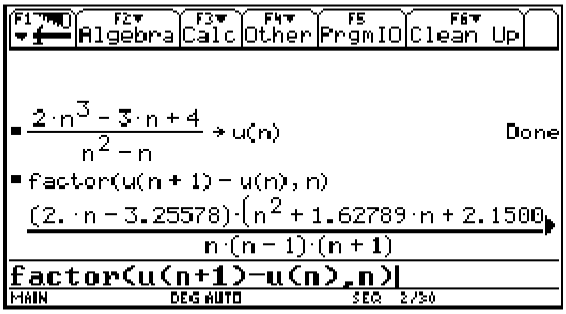
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de son terme général

$$u_n = \frac{2n^3 - 3n + 4}{n^2 - n} \quad (n \geq 2) \ .$$

Etudier le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Réponse

$$(\forall n \geq 2) \ : \ u(n+1) - u(n) = \frac{(2n - 3,255...)\left(\overbrace{n^2 + 1,627...n + 2,150...}^{\Delta<0 \Rightarrow S_{\mathbb{R}} = \varnothing}\right)}{n(n-1)(n+1)} > 0 \Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow$$



Exercice 3

Déterminer les quatre premiers termes d'une suite arithmétique sachant que leur somme est 12 et la somme de leurs carrés est 116.

Réponse

$$\left.\begin{array}{l} a + (a+r) + (a+2r) + (a+3r) = 12 \\ a^2 + (a+r)^2 + (a+2r)^2 + (a+3r)^2 = 116 \end{array}\right\} \Rightarrow (a = -3 \wedge r = 4) \vee (a = 9 \wedge r = -4)$$

On obtient deux solutions :

a) suite arithmétique croissante : $u_0 = -3; u_1 = 1; u_2 = 5; u_3 = 9$

b) suite arithmétique décroissante : $u_0 = 9; u_1 = 5; u_2 = 1; u_3 = -3$

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 = a = 5$ et de raison $r = \frac{7}{3}$.

Déterminer n_0 tel que $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n_0} = 12529$ et en déduire u_{n_0} .

Réponse

$$\sum_{i=0}^{n_0}\left(5+\frac{7}{3}i\right) = \frac{(n_0+1)(7n_0+30)}{2}$$

$$\frac{(n_0+1)(7n_0+30)}{2} = 12529 \Leftrightarrow n_0 = 101 \text{ ou } n_0 = \underbrace{-\frac{744}{7}}_{\text{à exclure car } n\in\mathbb{N}}$$

$$u_{101} = 5+\frac{7}{3}\cdot 101 = \frac{722}{3}$$

Remarque : $\text{SOLVE}\left(\sum_{i=0}^{n}\left(5+\frac{7}{3}i\right)=12529, n\right) \to n = 101 \vee n = -\frac{744}{3}$

Exercice 5

Déterminer le 12ième terme d'une suite arithmétique sachant que :

1°) La somme des n premiers termes vaut 1179.

2°) La différence entre le nième terme et le premier terme vaut 119.

3°) Le troisième terme vaut 20.

Réponse

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=0}^{n-1}(a+i\cdot r) = 1179 \\ a+(n-1)\cdot r - a = 119 \\ a + 2\cdot r = 20 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (a=6 \wedge r=7 \wedge n=18) \vee \underbrace{\left(a=\frac{2743}{2} \wedge r=-\frac{2703}{4} \wedge n=\frac{131}{159}\right)}_{\text{à exclure car } n\in\mathbb{N}}$$

$$u_{12} = 6 + 12\cdot 7 = 90$$

Exercice 6

Déterminer le 12ième terme d'une suite arithmétique sachant que :

1°) La raison vaut 6.

2°) Le produit des quatre premiers termes vaut 385.

Donner toutes les solutions s'il y en a. (On demande les valeurs exactes et des valeurs approchées à 0,01 près.)

Réponse

$a\cdot(a+6)\cdot(a+12)\cdot(a+18)=385 \Leftrightarrow a=-9-\sqrt{86} \vee a=-9+\sqrt{86} \vee a=-7 \vee a=-11$

a) Première solution : $a=-9-\sqrt{86} \Rightarrow u_{12}=-9-\sqrt{86}+12\cdot 6=63-\sqrt{86}\approx 53,73$

b) Deuxième solution : $a=-9+\sqrt{86} \Rightarrow u_{12}=-9+\sqrt{86}+12\cdot 6=63+\sqrt{86}\approx 72,27$

c) Troisième solution : $a=-7 \Rightarrow u_{12}=-7+12\cdot 6=65$

d) Quatrième solution : $a=-11 \Rightarrow u_{12}=-11+12\cdot 6=61$

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0=1$; $u_{n+1}=2\cdot u_n+3$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$.

a) Calculer u_n si $n\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

b) Calculer $\sum_{i=0}^{10} u_i$.

c) Exprimer u_n en fonction de n et en déduire n_0 tel que $u_{n_0}>10^9$ et $u_{n_0-1}<10^9$.

d) Exprimer $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$ en fonction de n.

Réponse

a) $u_1=5$; $u_2=13$; $u_3=29$; $u_4=61$; $u_5=125$; $u_6=253$

$u_7=509$; $u_8=1021$; $u_9=2045$; $u_{10}=4093$

b) $\sum_{i=0}^{10} u_i=8155$

c)
$$\begin{aligned}u_n&=2\cdot u_{n-1}+3=2\cdot(2\cdot u_{n-2}+3)+3\\&=2^2\cdot u_{n-2}+2\cdot 3+3 \quad =2^2\cdot(2\cdot u_{n-3}+3)+2\cdot 3+3 \quad =2^3\cdot u_{n-3}+2^2\cdot 3+2\cdot 3+3\\&=...\\&=2^n\cdot u_0+2^{n-1}\cdot 3+2^{n-2}\cdot 3+...+2^2\cdot 3+2\cdot 3+3=2^n+3\cdot\left(1+2+2^2+...+2^{n-2}+2^{n-1}\right)\\&=2^n+3\cdot\frac{2^n-1}{2-1}\\&=2^{n+2}-3\end{aligned}$$

$u_n=10^9 \Leftrightarrow n=27,897...$; $u_{27}=536870909$; $u_{28}=1073741821 \Rightarrow n_0=28$

d) $S_n=\sum_{i=0}^{n-1}\left(2^{n+2}-3\right)=4\cdot 2^n-3\cdot n-4$
